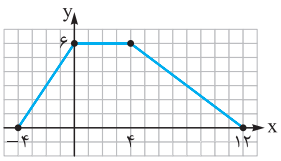
DECODE
#رمزگشایی ۲۰ نهایی و ۱۰۰ کنکور!
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون ۱	ریاضی (۳)	پایهٔ دوازدهم ـ رشته: علوم تجربی	خیلی سبز!
	فصل ۱: تابع (آزمون جامع ۱)	مـدت آزمـون: ۶۰ دقیقه	

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) برای دو تابع f و g با شرط آن‌که $f \neq g$، تساوی $gof(x) = fog(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست. ب) برد تابع $3f(x)$ در حالت کلی با برد تابع $f(x)$ برابر نیست. ج) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) در بازهٔ $(۰,۱)$، نمودار $y = x^۲$ ..... از نمودار $y = x^۳$ قرار دارد. (مشابه فعالیت کتاب درسی) ب) اگر $f = \{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g = \{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، حاصل $(fog)(۵)$ برابر است با ..... . ج) توابع اکیداً یکنوا، غیر یک‌به‌یک ..... (هستند ـ نیستند).	۰/۷۵
۳	اگر $f(x) = \frac{۱}{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x-۳}$ دو تابع باشند: الف) مقدار $(f-g)(۴)$ را به دست آورید. ب) دامنهٔ تابع fog را بیابید. توجه کنید که D_{fog} رو باید به کمک تعریف به‌دست بیارین؛ یعنی اگه به کمک ضابطهٔ fog دامنه‌اش را به‌دست بیارید، از تون نمره کم می‌شه.	۱/۷۵
۴	نمودار $y = x^۳ - ۳$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.	۰/۷۵
۵	نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-۴x+۱۲}{۷}$ و $g(x) = \frac{۷x-۱۲}{-۴}$ وارون یکدیگرند.	۱/۲۵
۶	با توجه به ضابطه‌های توابع g و f، معادلهٔ مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی) $f(x) = x^۲ + x + ۳$ $g(x) = ۲ - ۴x$ $gof(x) = -۱۰$	۱/۲۵
۷	نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = \lvert x \rvert$ را ابتدا دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، سپس عرض نقاط را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید را بنویسید.	۰/۵
۸	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار $y = ۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید. دوستان خوبم، دیگه فکر کنم تا الان متوجه شدین که تغییرات و انتقال توابع جزء سؤالات دائمی امتحانات نهایی هستن. خوشبختانه مبحث رامتی هم هست و با کمی دقت می تونید یادش بگیرید. 	۰/۵
۹	اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ $g^{-۱}of^{-۱}$ را به دست آورید. $(x > ۰)$	۱
۱۰	با رسم نمودار تابع f، بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. $f(x) = \begin{cases} x^۳ & x < ۰ \\ ۱ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ x-۱ & x > ۱ \end{cases}$	۱/۵
	موفق باشید	جمع نمرات: ۱۰

آزمون شمارهٔ ۱ (فصل اول: جامع ۱)

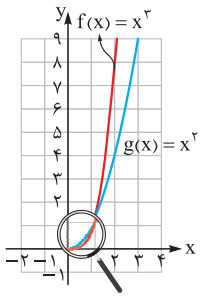
۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

مثلاً اگر $f(x)=2x$ و $g(x)=3x$ باشند، با آن‌که $f\neq g$، ولی تساوی $fog=gof$ برقرار است. $(fog)(x)=(gof)(x)=6x^2$

ب) درست (۰/۲۵) دامنهٔ توابع $f(x)$ و $3f(x)$ برابرند، اما برد آن‌ها لزوماً برابر نیست؛ مثلاً اگر برد $f(x)$ برابر با $[0,2]$ باشد، برد $3f(x)$ برابر است با $[0,6]$.

ج) درست (۰/۲۵)

۲ الف) بالاتر (۰/۲۵)



ب) ۸ (۰/۲۵)

$$fog(5)=f(g(5)) \xrightarrow[g(5)=7]{(5,7)\in g} f(7) \xrightarrow{(7,8)\in f} f(7)=8$$

ج) نیستند (۰/۲۵)

نکته

توابع اکیداً یکنوا، همواره یک‌به‌یک هستند.

۳ الف) $3(f-g)(4)=\underbrace{3(f(4)-g(4))}_{(0/25)}=\underbrace{3(\frac{1}{3}-1)}_{(0/25)}=-2$ (۰/۲۵)

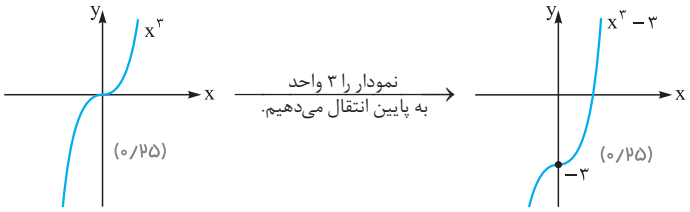
ب) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$, $D_g: x\geq 3$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ (۰/۲۵)

$=\underbrace{\{x\in[3,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x-3}}_{x-3\neq 1}\neq 1\}}_{(0/25)}=\{x\in[3,+\infty) \mid \underbrace{x\neq 4}_{(0/25)}\}$

$\Rightarrow D_{fog}=[3,4)\cup(4,+\infty)$ یا $[3,+\infty)-\{4\}$ (۰/۲۵)

۴ ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. با توجه به شکل، تابع اکیداً صعودی است. (۰/۲۵)



۵

نکته

دو تابع f و g وارون یکدیگرند، هرگاه:

$$\begin{cases} fog(x)=x & x\in D_g \\ gof(x)=x & x\in D_f \end{cases}$$

$$fog(x)=f(g(x))=\underbrace{\frac{\cancel{-4}(\frac{7x-12}{\cancel{-4}})+12}{7}=\frac{7x-12+12}{7}=x}_{(0/5)}$$

$$gof(x)=g(f(x))=\underbrace{\frac{\cancel{7}(\frac{-4x+12}{\cancel{7}})-12}{-4}=\frac{-4x+12-12}{-4}=x}_{(0/5)}$$

$fog(x)=gof(x)=x$ (۰/۲۵) و $D_f=D_g=\mathbb{R}$

۶

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x+3 \\ g(x)=2-4x \end{cases}$$

$gof(x)=g(f(x))=-10$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2-4(x^2+x+3)=-10$ (۰/۲۵)

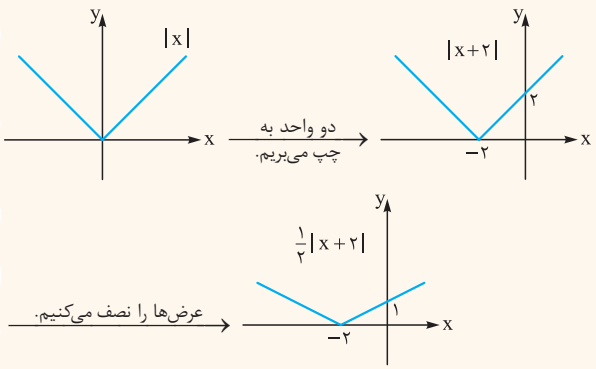
$\Rightarrow 2-4x^2-4x-12=-10 \Rightarrow -4x^2-4x-10+10=0$

$\Rightarrow 4x^2+4x=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 4x(x+1)=0$

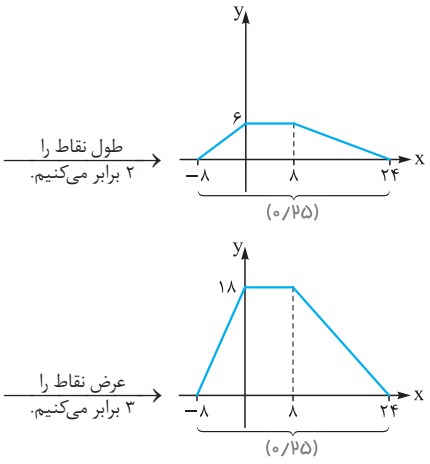
$\Rightarrow \begin{cases} 4x=0 \Rightarrow x=0 & (0/25) \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 & (0/25) \end{cases}$

۷ $y=|x| \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۲ واحد}} y=|x+2| \xrightarrow[\text{تقسیم بر ۲}]{\text{عرض نقاط}} y=\underbrace{\frac{1}{2}}_{(0/25)}\underbrace{|x+2|}_{(0/25)}$

رسم شکل به درک بهتر سؤال کمک می‌کند.



۸ برای رسم نمودار $y=3f(\frac{1}{2}x)$ ابتدا طول نقاط $f(x)$ را ۲ برابر می‌کنیم، سپس عرض نقاط نمودار حاصل را در ۳ ضرب می‌کنیم، لذا خواهیم داشت:



۹

نکته

$(g^{-1}of^{-1})=(fog)^{-1}$

ابتدا ضابطهٔ fog را محاسبه می‌کنیم، سپس معکوس آن را به دست می‌آوریم:

$y=(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=3+\sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-1}=y-3$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-1=(y-3)^2 \Rightarrow x^2=(y-3)^2+1$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm\sqrt{(y-3)^2+1} \xrightarrow{x>0} \underbrace{(fog)^{-1}(x)=\sqrt{(x-3)^2+1}}$ (۰/۵)

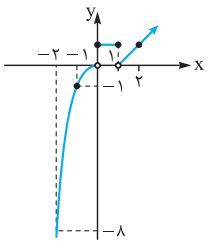
۱۰ ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن تک‌تک نمودارها را به روش نظیریابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت‌بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

x	۰	−۱	−۲
y	۰	−۱	−۸

خط افقی $y=1$

x	۱	۲
y	۰	۱



رسم صحیح نمودار (۰/۷۵)

می‌بینیم که تابع در بازه‌های

$\underbrace{(-\infty,0) \text{ و } (1,+\infty) \text{ اکیداً صعودی}}_{(۰/۲۵)}$

و در بازهٔ $\underbrace{[0,1] \text{ ثابت است.}}_{(۰/۲۵)}$